CHAPITRE V
Compléments sur $\mathbb{R}$, compléments sur $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$, Taylor-Young

Dérivation et formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$
L'anneau $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels
Formule de Taylor-Young

A) LE CORPS DES RÉELS

I) DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

1) Ordre, bornes supérieure et inférieure :

Soit E un ensemble non vide totalement ordonné par une relation d'ordre $\leq$, et A une partie (sous-ensemble) non vide de E.

Déf : $M \in E$ est un majorant de A ssi $\forall x \in A,\ x \leq M$

Déf : $m \in E$ est un minorant de A ssi $\forall x \in A,\ x \geq m$

Ex : E=R, A=[3 ; 5[majoré par 10, par 5, par 7,3… Minoré par 2, par -15, par 3

Déf : $M \in E$ est le plus grand élément, ou maximum, de A ssi M est un majorant de A et $M \in A$. Notation : M=max(A).

Déf : $m \in E$ est le plus petit élément, ou minimum, de A, ssi m est un minorant de A et $m \in A$. Notation : m=min(A).

Ex : E=R, A=[3 ; 5[min(A)=3, max(A)+… ? N'existe pas ! On voit que de nouvelles notions sont nécessaires.

Déf 1 : M est borne supérieure de A ssi M est le plus petit des majorants de A ; si elle existe, la borne supérieure est unique. Notation : M=sup(A).

Déf 1 : m est borne inférieure de A ssi m est le plus grand des minorants de A ; si elle existe, la borne inférieure est unique. Notation : m=inf(A).

Ex : E=R, A=[3 ; 5[, inf(A)=3, sup(A)=5.

Prop : M=max(A) ssi (M=sup(A) et $M \in A$) ; m=min(A) ssi (m=inf(A) et $m \in A$).

Prop (déf 2) : M=sup(A) ssi ($\forall r \in \mathbb{R}$ tel que $r<M$, alors $\exists a \in A$ tel que $r<a\leq M$) (*)

ssi ($\forall \varepsilon>0$, alors $\exists a \in A$ tel que $M-\varepsilon<a\leq M$) (**)

[[Démo de (*) : soit M=sup(A) et $r \in \mathbb{R}$ tel que $r<M$; alors r ne peut être un majorant de A puisque M est le plus petit des majorants, donc il existe dans A un $a>r$.

Démo de (**) : idem avec $r=M-\varepsilon$, càd $\varepsilon=M-r$.]]

Prop (déf 2) : m=inf(A) ssi ($\forall r\in\mathbb{R}$ tel que r>m, alors $\exists a\in A$ tel que $m\leq a<r$) (*)

ssi ($\forall \varepsilon>0$, alors $\exists a\in A$ tel que $m\leq a<m+\varepsilon$) (**)

2) Le corps des réels

Déf : Admis : il existe un corps (cf cours evs) commutatif $\mathbb{R}$ totalement ordonné, qui contient l'ensemble des rationnels Q et satisfait à la propriété de la borne supérieure.

Totalement ordonné : pour tout $x,y\in R$ $x\leq y$ ou $y\leq x$

Propriété de la borne supérieure : Toute partie non vide et majorée de R possède dans R une borne supérieure.

Il en résulte que $\mathbb{R}$ possède aussi de manière équivalente la :

Propriété de la borne inférieure: Toute partie non vide et majorée de R possède dans R une borne supérieure.

II) VALEUR ABSOLUE, PARTIE ENTIÈRE

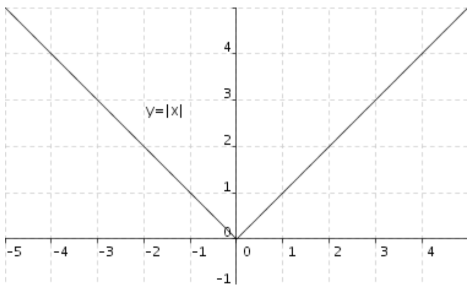
1) Valeur absolue :

Déf : $\forall x\in R$ $|x|=\max(x,-x)$

Prop : Pour tous $x, y \in R$,

- $-|x|\leq x\leq |x|$.
- Si $\alpha\geq 0$: $|x|\leq\alpha \Leftrightarrow -\alpha\leq x\leq\alpha$.
- $|-x|=|x|$.
- $|x\times y|=|x|\times|y|$ donc $\forall n\in N$, $|x^n|=|x|^n$.
- Inégalité triangulaire : $|x+y|\leq|x|+|y|$ avec égalité à droite si et seulement si x et y de même signe. Conséquence $\big||x|-|y|\big|\leq|x-y|$. Inégalité triangulaire généralisée : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|x_k|$

Représentation graphique :



2) Partie entière :

Rq : $\forall a\in\mathbb{R}$, il se trouve un unique entier dans chacun des intervalles [a-1 ; a[et]a-1 ; a].

Plus généralement, $\forall k\in\mathbb{N}$, il existe exactement k entiers dans chaque [a-k ; a[et]a-k ; a].

/ !\ : Il peut y avoir deux entiers dans [a ; a+1] (si a entier).

Déf : $\forall x \in R\ \exists! n \in Z$ tq $n \leq x < n+1$, on le nomme « partie entière de x », noté $\lfloor x \rfloor$ (ou E(x)).

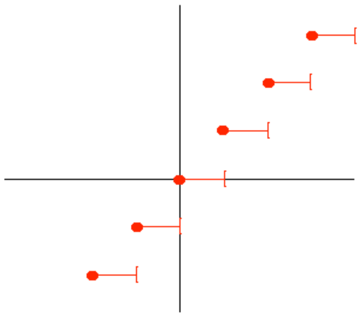
Déf équivalente : $n \in Z$ est la partie entière de x ssi $x-1 < n \leq x$

$$\boxed{x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \quad \Leftrightarrow \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$$

Ex : E(3,2) E(6,99) E(5) E(-2) E(-2,5) E(-2,01)

/ ! \ : troncature(3,2)=E(3,2) mais troncature(-2,5)=-2≠E(-2,5)

Représentation graphique :



Rq : la partie entière est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

B) COMPLÉMENTS SUR $\mathbb{K}[X]$ ET $\mathbb{R}[X]$

0) Introduction : Algèbre des polynômes

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On a vu Chap.II que ($\mathbb{K}[X]$,+) est un groupe commutatif (tout élément à un opposé pour +), que ($\mathbb{K}[X]$,+,×), où « × » est la multiplication des polynômes, est un anneau (une addition et une multiplication, mais pas d'inverses pour × en général), et au Chap.III que ($\mathbb{K}[X]$,+,.), où « . » est la multiplication par un scalaire, est un $\mathbb{K}$-ev.

($\mathbb{K}[X]$,+,×,.) est alors appelé une algèbre.

Ex 1: Donner le reste dans la division euclidienne de $P=(X+1)^{2n}-X^{2n}-2X-1$ par

a) 2X+1

b) X

c) X^2

$\Longrightarrow$Méthode : reste d'une division euclidienne par un polynôme de degré 1 ou 2 :

Soit $p \in \mathbb{K}[X]$ et (a,b) deux éléments de $\mathbb{K}$. Déterminer en fonction de P(a) et de P(b), ou le cas échéant de P'(a), le reste de la division euclidienne de P par (X-a)(X-b) :

I) DÉRIVATION SUR $\mathbb{K}[X]$

a) Déf : pour $P=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n \in \mathbb{K}_n[X]$ avec $n \geq 1$ alors $P'=a_1+2a_2X+\ldots+na_nX^{n-1} \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$
(En réitérant l'opération : $P^{(k)} \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ si $k \leq n$ et $P^{(k)}=0$ si $k>n$.

Ex 2 : déterminer la dérivée j-ième de (a_kX^k). En déduire que si $P=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$, alors $a_j=P^{(j)}(0)/(j\,!)$.

b) Formules habituelles pour la dérivation. Faux rappel sur la dérivation des fonctions composées : $(f\circ g)'=(f'\circ g)\times g'$; dans le cas des polynômes : $(P\circ Q)'=(P'\circ Q)\times Q'$

Ex 3 : $P=-X+1$, $Q=2X^2-3X+2$, $(P\circ Q)'=$? $(Q\circ P)'=$?

Formule de Leibniz :

Pour les polynômes comme pour toutes les fonctions : $(P\times Q)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k)}$

Ex 4 : $(PQ)^{(4)}$

Ex 5 : calculer la dérivée n-ième de X^2P

Ex 6 : démontrer par récurrence la formule de Leibniz

b) Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{K}[X]$:

Si $P\in\mathbb{K}_n[X]$ alors $\forall a\in\mathbb{K}$ **:**

$$P(X)=P(a)+(X-a)P'(a)+\frac{(X-a)^2}{2}P''(a)+\frac{(X-a)^3}{3!}P^{(3)}(a)+\dots+\frac{(X-a)^k}{k!}P^{(k)}(a)+\dots+\frac{(X-a)^n}{n!}P^{(n)}(a)$$

Avec un Σ : $P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$

[[Démo :

]]

Ex 7 : P polynôme de degré 3 :

Une application de la formule de Taylor : détermination de la multiplicité d'une racine :

Thm :
Soit P un polynôme non nul, et $a\in K$ alors la multiplicité m de a comme racine de P est $m=\min\{k\in\mathbb{N} \text{ tq } P^{(k)}(a)\neq 0\}$ (càd le plus petit m tel que $P(a)=P'(a)=\cdots=P^{(m-1)}(a)=0$ et $P^{(m)}(a)\neq 0$)

[[Démo :

]]

Ex 8 : déterminer l'ordre de multiplicité de 1 comme racine de $X^5-3X^4+2X^3+2X^2-3X+1$, en déduire sa factorisation.

⟹Application/Méthode : utilisation de Taylor pour déterminer reste et quotient d'une division euclidienne par un polynôme ayant une seule racine :

Ex 9 : division euclidienne de X^n par $(X-1)^3$

II) LE CAS DE ℝ[X] :

Thm : $\boxed{\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]}$ (tout polynôme à coefficients réels peut être considéré comme un polynôme à coefficients complexes, puisque les réels sont aussi des complexes).

Lemme: soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\bar{a}$ est aussi racine, de même multiplicité.

[[Démo par factorisation :

]]

Thm : tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ peut s'écrire $P = a_n \prod_{i=1}^{p} (X - r_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{q} (X^2 + b_j X + c_j)^{p_j}$, avec $a_n \in \mathbb{R}$ est le coefficient dominant de P, $(r_i)_{i \in \{0,1,\ldots,p\}}$ des réels (les racines de P), $(m_i)_{i \in \{0,1,\ldots,p\}}$ des entiers (les ordres de multiplicité de ces racines), les b_i et les c_i des coefficients réels, et les p_j des exposants entiers (ordres de multiplicité des trinômes), avec $b_j^2 - 4c_j < 0$.

Corollaire : les polynômes irréductibles de ℝ[X] sont les polynômes de degré 1, et les polynômes de degré 2 à discriminant négatif.

[[Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, comme $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, $P \in \mathbb{C}[X]$, donc P peut s'écrire $P = a_n \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{m_i}$, avec $(a_i)_{i \in \{0,1,\ldots,n\}}$ des racines complexes et $(m_i)_{i \in \{0,1,\ldots,n\}}$ leurs multiplicités respectives.

Parmi les racines, certaines sont réelles, et d'autres complexes non réelles ; d'après le lemme ci-dessus il y a un nombre pair de racines non réelles, conjuguées deux à deux.

Après avoir renommé les racines, on peut donc écrire : $P = a_n \prod_{i=1}^{p} (X - r_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{q} (X - a_i)^{m'_i} (X - \overline{a_i})^{m'_i}$, avec $(r_i)_{i \in \{0,1,\ldots,p\}}$ des réels.

Puis, on calcule $(X-a_i)(X-\bar{a}_i)=X^2-2\mathrm{Re}(a_i)X+|a_i|^2$, et en posant $b_i=-2\mathrm{Re}(a_i)$ et $c_i=|a_i|^2$, on obtient l'expression du théorème.]]

<u>Ex 10</u> : Factoriser X^4-1 en produits de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ (deux méthodes)

<u>Ex 11</u> : Factoriser X^8-1 en produits de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ (deux méthodes)

<u>Ex 12</u> : Factoriser X^5-1 dans $\mathbb{R}$ (rq/méthode : une première factorisation grâce à une identité remarquable n'est possible que si le degré est pair ; sinon on peut éventuellement poser $Y=\sqrt{X}$)

<u>Ex 13</u> : Factoriser X^4+1 dans $\mathbb{R}$ (deux méthodes)

$\Longrightarrow$Méthode : Factorisation de X^n-1 en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Ex/application : Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $1+x+x^2+\ldots+x^n$

Rq : nombre de racines réelles d'un polynôme de degré 3 à coefficients réels

C) FORMULE DE TAYLOR-YOUNG POUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES ($\mathbb{R}\to\mathbb{R}$)

1) Préalable topologique : voisinage

Déf : soit $a\in\mathbb{R}$. Une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle ouvert qui contient a est appelé un voisinage de a.

Ex : $[1 ; 5]$, $]1 ; 5[$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{N}\cup[1,9 ; 2,3[$ sont tous des voisinages de 2.

Rq : En particulier, tout intervalle dont a est un point intérieur est un voisinage de a.

2) Formule de Taylor-Young pour les fonctions à valeurs réelles

Notation : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $D^n(I)$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I, et $C^n(I)$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ est continue.

Rq : $C^n(I)\subset D^n(I)$.

Thm : Soit $a\in\mathbb{R}$, I un voisinage de a et $f\in D^N(I)$.

Alors, $\forall x\in I$, $\forall n\leq N$, $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+(x-a)^n\varepsilon(x)$

où : $\varepsilon : I\to\mathbb{R}$ est une fonction qui tend vers 0 en a ($\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}(\varepsilon(x))=0$).

On pose souvent $x=a+h$, pour obtenir : $\boxed{f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+h^n\tilde{\varepsilon}(h),\text{ avec }\lim\limits_{h\to 0}(\tilde{\varepsilon}(h))=0}$.

3) Notations de Landau

Déf : Soit $a\in\mathbb{R}$; si deux fonctions f, g sont telles qu'il existe un voisinage de a, où f et g soient définies et g ne s'annule pas, et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\left(\frac{f}{g}(x)\right)=0$, on dit que f est négligeable devant g (ou que « f est un petit o de g ») en a, et on note : $f(x)=\underset{x\to a}{o}(g(x))$.

Thm : $f(x)=\underset{x\to a}{o}(g(x))$ ssi il existe un voisinage I de a, et une fonction $\varepsilon : I\to \mathbb{R}$ telle que $(\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}(\varepsilon(x))=0)$ et $\forall x\in I\ f(x)=\varepsilon(x)g(x)$

[[

]]

Avec les notations de Landau Taylor-Young s'écrit:

Thm (*) : Soit $a\in\mathbb{R}$, I un voisinage de a et $f\in D^N(I)$, alors, $\forall x\in I$, $\forall n\leq N$,

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\underset{x\to a}{o}[(x-a)^n]$, « développement limité à l'ordre n de f en a », « $DL_n(a)$ »

Ou encore : $f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+\underset{h\to 0}{o}(h^n)$

Ex14 : Écrire les $DL_3(0)$ de Cos, Sin, Exp, $(x\mapsto x^2)$

Ex 15 : Écrire les $DL_3(1)$ de $\sqrt{}$, Ln